物　理　学　B

【全 1 ページ】

次の設問に答えなさい。

質量 m，角振動数 ω をもつ 1 個の 1 次元調和振動子を考える。この調和振動子の座標を x で表すと，この系のハミルトニアン H は $H=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\frac{m\omega^2}{2}x^2$ と表される。（ここで，$\hbar$ は，プランク定数 h を用いて，$\hbar = h/(2\pi)$ で定義される定数である。）H の n 番目（n=0, 1, 2, …）の正規直交化された固有状態 $|n\rangle$ と固有値 ε_n を用いると，$H\,|n\rangle = \varepsilon_n\,|n\rangle$ と表すことができる。

さらに，$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x-\frac{\hbar}{m\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)$，$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x+\frac{\hbar}{m\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)$ を定義する。これらの演算子を用いると，$a^\dagger\,|n\rangle$ や $a\,|n\rangle$ は，n+1 番目および n−1 番目の固有状態 $|n+1\rangle$ と $|n-1\rangle$ を用いて，

$$a^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \qquad \text{[I]}$$

$$a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle \qquad \text{[II]}$$

となる。

(1)　$a^\dagger a$ を m や ω 等を用いて表しなさい。さらに，この結果をもとに，この系のハミルトニアン H が $H=\hbar\omega(a^\dagger a+\frac{1}{2})$ と表されることを示しなさい。

(2)　上の式 [I] や [II] をもとに，$a^\dagger a\,|n\rangle$ および $aa^\dagger\,|n\rangle$ を n を用いて表しなさい。さらに，$H=\hbar\omega(a^\dagger a+\frac{1}{2})$ と表されることを利用して，ε_n の式を示しなさい。

(3)　$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ および x^2 を $a^\dagger$ と a を用いて表しなさい。

(4) (3)の結果をもとに, n 番目の状態の運動エネルギーの期待値（$\langle T\rangle = \langle n|-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}|n\rangle$）およびポテンシャルエネルギーの期待値（$\langle V\rangle = \langle n|\frac{m\omega^2}{2}x^2\,|n\rangle$）を求めなさい。

さらに，$\langle T\rangle$，$\langle V\rangle$ および ε_n の関係について，その物理的意味を述べなさい。