

物理学 B I

次の設問について答えなさい。

I - a

量子力学では、運動量演算子 \hat{p} は座標 x およびプランク定数 \hbar ($\hbar = h / (2\pi)$) を用いて、

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

と表すことができる。このとき、座標演算子 \hat{x} と運動量演算子 \hat{p} の交換関係が

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

となることを示しなさい。

I - b

ハミルトニアン \hat{H} で表される系がある。この系における時刻 t の波動関数を $\psi(t)$ とするとき、波動関数の時間発展は

$$\frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

と表される。また、時刻 t における物理量 \hat{A} の期待値 $\langle A(t) \rangle$ は $\psi(t)$ を用い $\langle A(t) \rangle = \langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle$ と表される。物理量 \hat{A} があらわに時間に依存しないとき、期待値 $\langle A(t) \rangle$ の運動方程式 ($d\langle A(t) \rangle / dt$ に関する方程式) を求めなさい。

I - c

(1) 粒子の質量を m とするとき、ポテンシャル $V(x)$ をもつ 1 粒子系のハミルトニアン \hat{H} は

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(x)$$

で与えられる。このとき、この粒子の座標および運動量の期待値 $\langle x(t) \rangle$ および $\langle p(t) \rangle$ の運動方程式 ($d\langle x(t) \rangle / dt$ および $d\langle p(t) \rangle / dt$ に関する方程式) を求めなさい。

(2) (1) の系において、ポテンシャル $V(x)$ が

$$V(x) = \frac{1}{2} Kx^2$$

で与えられる調和振動子を考える。ただし、 K は正の定数とする。時刻 $t=0$ に $\langle x(0) \rangle = X_0$ 、 $\langle p(0) \rangle = 0$ で与えられる波束をこの系に生成させた。このとき、時刻 t における座標および運動量の期待値 $\langle x(t) \rangle$ および $\langle p(t) \rangle$ を m 、 K 、 X_0 を用いて表しなさい。

物 理 学 B II

次の設問に答えなさい。ボルツマン定数を k 、プランク定数を h とする。

II - a

質量 m 、固有振動数 ν をもつ 1 個の振動子について熱力学的性質を考える。温度 T における 1 粒子系の分配関数 Z は、取り得るエネルギー準位を E_n として一般に

$$Z = \sum_n \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right) \text{ とかける。}$$

(1) 調和振動子のエネルギー準位は

$$E_n = h\nu\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (n=0,1,2 \dots)$$

で与えられる。この振動子の分配関数 Z を求めなさい。ただし必要であれば、次の関係

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1) \text{ を用いなさい。}$$

- (2) この系のヘルムホルツ自由エネルギー F を求めなさい。
- (3) 内部エネルギー U を求めなさい。
- (4) 比熱 C を求めなさい。

II - b

N 個の原子からなる結晶体について、すべての振動モードが同一の振動数 ν_E をもつと考える (アインシュタイン模型)。

- (1) この系の比熱 C を求めなさい。ただし、アインシュタイン温度 $\theta_E = \frac{h\nu_E}{k}$ を用いて示しなさい。
- (2) 温度が十分に高いときの ($kT \gg h\nu_E$)、比熱 C の振る舞いを調べなさい。
- (3) 温度が十分に低いときの ($h\nu_E \gg kT$)、比熱 C の振る舞いを調べ、アインシュタイン模型が低温の近似に有効かどうかを述べなさい。なお低温では、固体の比熱は T^3 に比例することが知られている。
- (4) アインシュタイン模型による比熱の温度依存性の概要を図示しなさい。