

物 理 学 B I

量子力学に関する以下の設問について答えなさい。

I - a 軌道角運動量演算子について以下の問いに答えなさい。

(1) 軌道角運動量の x 成分 l_x は、 $l_x = yp_z - zp_y$ である。量子力学では、運動量演算子 \hat{p}_x は

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

と表せることを用いて、軌道角運動量演算子と位置演算子の交換関係 $[\hat{l}_x, \hat{x}]$, $[\hat{l}_x, \hat{y}]$, $[\hat{l}_x, \hat{z}]$ を計算しなさい。ここで、 $\hbar = h/2\pi$ はプランク定数である。また、演算子 \hat{A}, \hat{B} について、 $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ である。

(2) 軌道角運動量演算子について、 $[\hat{l}_x, \hat{l}_y] = i\hbar \hat{l}_z$ が成立することを示しなさい。

(3) 任意の演算子 \hat{A}, \hat{B} について、

$$[\hat{A}^2, \hat{B}] = \hat{A}[\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{A}$$

が成立することを用いて、軌道角運動量の 2 乗の演算子 \hat{l}^2 と z 成分の演算子 \hat{l}_z が交換することを示しなさい。

I - b ポテンシャル V が $0 \leq x \leq L$ の領域で $V = 0$ 、 $x < 0$, $L < x$ の領域で $V = \infty$ である一次元井戸型ポテンシャルの中で運動する質量 m の粒子を考える。この粒子の波動関数と固有エネルギーは、 $0 \leq x \leq L$ の領域において、

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad E_n = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (1)$$

で与えられる。以下の問いに答えなさい。

(1) この系のシュレーディンガー方程式を記しなさい。

(2) 波動関数の満たすべき境界条件を示しなさい。

(3) 波動関数を

$$\psi(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx)$$

とおき、境界条件を課すことによって、式(1)の解を導出しなさい。

物理学 B II

統計力学に関する以下の設問に答えなさい。

磁場中のイジングスピンは $-\varepsilon$ 又は ε の 2 つのエネルギーの値を取る。

- (1) 一般に状態 i のエネルギーが E_i とあらわされる場合、温度 T のカノニカルアンサンブルにおける分配関数 Z は

$$Z = \sum_{\text{全ての状態 } i} e^{-\frac{E_i}{kT}}$$

で与えられる。ただし、 k はボルツマン定数である。1 つのイジングスピンについて分配関数 Z を求めなさい。

- (2) 以下、 N 個の独立なイジングスピン系について考える。この系の温度 T のカノニカルアンサンブルにおける分配関数 Z を求めなさい。
- (3) $F = -kT \log Z$ の関係を用いて自由エネルギー F を求めなさい。
- (4) $S = -\frac{\partial F}{\partial T}$ の関係を用いてエントロピー S を求めなさい。
- (5) $U = F + ST$ の関係を用いて内部エネルギー U を求めなさい。
- (6) $C = \frac{\partial U}{\partial T}$ の関係を用いて熱容量 C を求め、 T の関数としての C を図示しなさい。