物 理 学 A I

古典力学に関する以下の設問に答えなさい。

I

太陽のまわりを周回する地球の運動に関する下記の設問に答え，ケプラーの法則を導きなさい。地球と太陽のみにより構成された系を考え，作用する力は万有引力のみとする（外力なし）。また，摩擦や抵抗も働かないものとする。

質点１（地球）と質点２（太陽）の質量をm_1とm_2，位置ベクトルを$\mathbf{r}_1$と$\mathbf{r}_2$とする。また，質点２に対する質点１の相対位置ベクトルを$\mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$とする。質点１と２の相対運動に働く内力は，それぞれ$\mathbf{F}_{12}$と$\mathbf{F}_{21}$で，$\mathbf{F}_{12}=-\mathbf{F}_{21}=\mathbf{F}(\mathbf{r})$の関係がある。

（１）系の重心の位置ベクトルを

$$\mathbf{r}_\mathrm{C}=\frac{m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2}$$

とした場合の重心の運動方程式を導きなさい。

（２）次に，相対位置ベクトル$\mathbf{r}$と換算質量μ（ただし，$\dfrac{1}{\mu}\equiv\dfrac{1}{m_1}+\dfrac{1}{m_2}$）を用いて，２体の相対運動に関する運動方程式を導きなさい。

（３）質点１と２に働く内力$\mathbf{F}(r)$は中心力であるため，$\mathbf{F}(r)=f(r)\dfrac{\mathbf{r}}{r}$と記述することができる。ただし，$f(r)$は任意の関数とする。このことに留意して，相対運動の角運動量$\mathbf{L}=\mathbf{r}\times\mu\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$が保存することを示しなさい。

（４）この角運動量$\mathbf{L}$の方向にz軸をとれば，相対運動はz軸に垂直な２次元平面内での運動として考えることができる。２次元の極座標系(r,θ)を導入することにより，デカルト（直交）座標系は下記のように変換される。

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

この座標系では，速度のrとθ方向の成分v_rとv_θ，また，加速度成分a_rとa_θは

$$\begin{cases} v_r=\dfrac{dr}{dt} \\ v_\theta=r\dfrac{d\theta}{dt} \end{cases},\quad \begin{cases} a_r=\dfrac{d^2r}{dt^2}-r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ a_\theta=\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{d\theta}{dt}\right) \end{cases}$$

と記述される。

また，この関係から相対運動の２次元極座標系における運動方程式は

$$
\begin{cases}
\mu a_r = \mu\left[\dfrac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = F_r \\
\mu a_\theta = \mu\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{d\theta}{dt}\right)\right] = F_\theta
\end{cases}
$$

と記述される。特に，ここで対象としている太陽と地球により構成される２体問題の系では働く力が中心力$\mathbf{F}(\mathbf{r})$であることから，そのr方向とθ方向の成分はそれぞれ$F_r = f(r)$，$F_\theta = 0$となる。この運動方程式から角運動量の大きさ$L \equiv \mu r^2 \dfrac{d\theta}{dt}$が一定であることが導かれる。

（４a）$f(r) = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$の万有引力が働く場合の相対運動に対する力学的エネルギーEを，Lを含む形で示しなさい。その際，Eの運動エネルギー部分が$\dfrac{1}{2}\mu\left\{\left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}$と記述されることに注意せよ。なお，運動エネルギー部分の第二項は遠心力の効果を示す。万有引力定数はGとする。

（４b）遠心力の効果を含んだ実効的なポテンシャルエネルギーV_{eff}の相対距離rに対する依存性の概略図を示しなさい。また，V_{eff}が極小となる相対距離dとその極小値V_{m}を求め，それらを図中に記しなさい。

（４c）軌道の方程式（rとθの関係式）は，$r = \dfrac{d}{1+\varepsilon\cos\theta}$と導かれる。ここで，$\varepsilon$は離心率で$\varepsilon = \sqrt{1 - E/V_{\mathrm{m}}}$で与えられる。この軌道の方程式をデカルト座標系$(x, y)$で書き直し，軌道が楕円となる離心率$\varepsilon$の条件を求めなさい。また，この離心率$\varepsilon$と問 (4b) で求めた$d$を用い，楕円軌道の長半径$a$と短半径$b$を求めなさい（ケプラーの第一法則）。

（５）ケプラーの惑星の運動に関する第二法則は，「面積速度が一定」となるものである（$dS/dt =$ 一定，Sは太陽（ひとつの焦点）周りに地球の軌道が掃引する面積）。これを示せ。ただし，無限小の角度変化$d\theta$に対する面積変化は $dS \cong \dfrac{1}{2}(rd\theta)\cdot r$とする。

（６）「公転周期の二乗と楕円軌道の長半径の三乗の比が一定になる」というケプラーの第三法則を導きなさい。

物　理　学　A　II

電磁気学に関する以下の設問について答えなさい。

II

以下全ての設問に対して MKSA 単位系を用い、真空の誘電率はε_0として答えなさい。

（1）図１に示す様に、z軸上の２点$z = a/2, z = -a/2$に電荷$q, -q$が距離aだけ離れて存在する。この２点から十分に遠い距離r_+、r_-だけ離れた位置$\vec{r} = (x_0, y_0, z_0)$において、この２つの電荷が作る静電ポテンシャル$\phi(\vec{r})$を$r_+$と$r_-$を用いて求めなさい。但し、無限遠での静電ポテンシャルを０とする。

（2）図２の様にモーメント$\vec{p}_1 = q\vec{a}$を持つ電気双極子 1 を考える。設問（1）で求めた静電ポテンシャルは、$\phi(\vec{r}) = \dfrac{\vec{p}_1 \cdot \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$と書けることを示しなさい。但し、電荷間距離$a$は十分に短く、位置$\vec{r}$は電気双極子から十分に離れていると仮定し、$r^2 >> a^2$の条件を使いなさい。$\theta$は$z$軸とベクトル$\vec{r}$のなす角度、$r$は原点から位置$\vec{r}$までの距離とする。

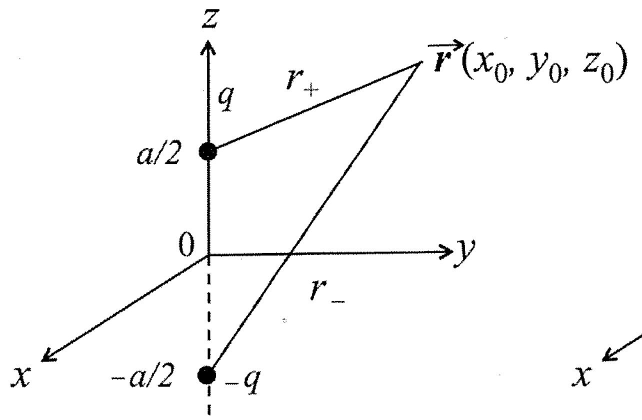

図1

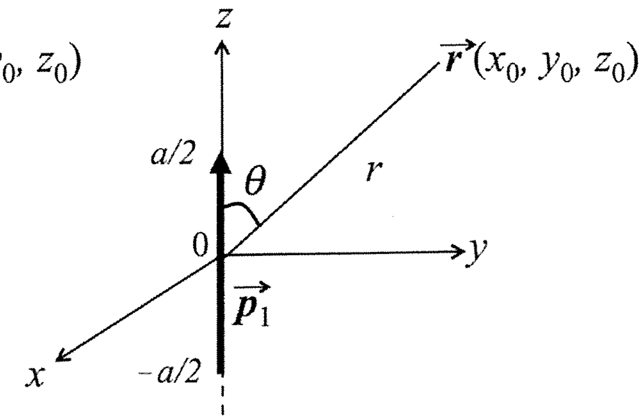

図2

（3）設問（2）で示した静電ポテンシャルを用いて、位置$\vec{r}$における電場$\vec{E}_1(\vec{r})$を求めなさい。

（4）位置$\vec{r}$にモーメント$\vec{p}_2 = q\vec{b}$を持つ別の電気双極子 2 が存在し、その電気双極子は

設問（3）で求めた電場$\vec{E}_1(\vec{r})$の作用を受けているとする。ここで、電気双極子 2 の位置エネルギーUを考える。電気双極子 2 の中心位置を$\vec{r}$とし、電荷qが位置 $\vec{r}+\dfrac{\vec{b}}{2}$、電荷$-q$が位置$\vec{r}-\dfrac{\vec{b}}{2}$に存在するとすれば、電気双極子 2 の位置エネルギーは$U=q\phi(\vec{r}+\dfrac{\vec{b}}{2})-q\phi(\vec{r}-\dfrac{\vec{b}}{2})$と書くことができる。電気双極子 2 の電荷間距離$b$が$|\vec{r}|$に比べて十分に短いとしてテーラー展開し、$\vec{b}$の１次の項までを残し、$U$を$\vec{p}_2$と$\vec{E}_1(\vec{r})$を用いて求めなさい。

（5）設問（4）のUは、$U=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{\vec{p}_1\cdot\vec{p}_2}{r^3}-\dfrac{3(\vec{p}_1\cdot\vec{r})(\vec{p}_2\cdot\vec{r})}{r^5}\right]$と書けることを示しなさい。このエネルギーは、双極子-双極子相互作用と呼ばれる。