

物 理 学 B I

【全2ページ】

I

量子力学に関する以下の設問に答えなさい。虚数単位を i とし、プランク定数 h を 2π で割ったものを $\hbar$ とする。

時間依存しないハミルトニアン $\hat{H}$ によって記述される量子系を考える。

- (1) 時刻 $t = t_0$ における状態ベクトルを $|\psi_0\rangle$ とするとき、時刻 t ($t > t_0$) の状態ベクトルは $|\psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}(t-t_0)/\hbar}|\psi_0\rangle$ と表される。時間依存しない物理量 F の時刻 t における期待値は、対応する演算子 $\hat{F}$ を用いて

$$\langle F \rangle_t = \langle \psi(t) | \hat{F} | \psi(t) \rangle$$

と表される。 $|\psi_0\rangle$ がハミルトニアン $\hat{H}$ の固有値 ε_n に属する固有状態 $|\varphi_n\rangle$ であるとき、期待値 $\langle F \rangle_t$ を求めなさい。

- (2) 設問 (1) で求めた $\langle F \rangle_t$ の時間依存性の物理的理由を簡潔に述べなさい。
- (3) 量子系の時間発展を考えると、演算子 $\hat{F}$ が時間発展すると考えることもでき、 $\hat{F}(t) = e^{i\hat{H}(t-t_0)/\hbar} \hat{F} e^{-i\hat{H}(t-t_0)/\hbar}$ と表される。 $\hat{F}$ が時間依存しないとき、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{F}(t) &= \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{F}(t)] \\ &= \frac{i}{\hbar} e^{i\hat{H}(t-t_0)/\hbar} [\hat{H}, \hat{F}] e^{-i\hat{H}(t-t_0)/\hbar} \end{aligned}$$

が成り立つことを示しなさい。ここで、 $[\hat{A}, \hat{B}]$ は演算子 $\hat{A}, \hat{B}$ の交換子である。

次に、一次元空間にある質量 m の粒子を考える。座標と運動量をそれぞれ x と p とする。

- (4) 座標演算子の任意の関数 $f(\hat{x})$ と運動量演算子 $\hat{p}$ が満たす交換関係 $[f(\hat{x}), \hat{p}]$ を求めなさい。座標表示を用いるとき、座標演算子は $\hat{x} = x$ 、運動量演算子は $\hat{p} = -i\hbar d/dx$ と表される。
- (5) この粒子のハミルトニアンがポテンシャル $V(x)$ を用いて $\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + V(\hat{x})$ と表されるとき、 $\frac{d\hat{x}(t)}{dt}$ および $\frac{d\hat{p}(t)}{dt}$ を求めなさい。
- (6) 設問 (5) の結果と古典力学との関連を簡潔に述べなさい。

- (7) 設問 (5) のポテンシャル $V(x)$ が, 角振動数 ω を用いて $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ で与えられるとき, $\hat{x}(t)$ を時刻 $t = 0$ における $\hat{x}(0)$ と $\hat{p}(0)$ を用いて求めなさい。
- (8) 設問 (7) の結果から, $[\hat{x}(t), \hat{x}(0)]$ を求めなさい。

(終わり)

物 理 学 B II

【全2ページ】

II

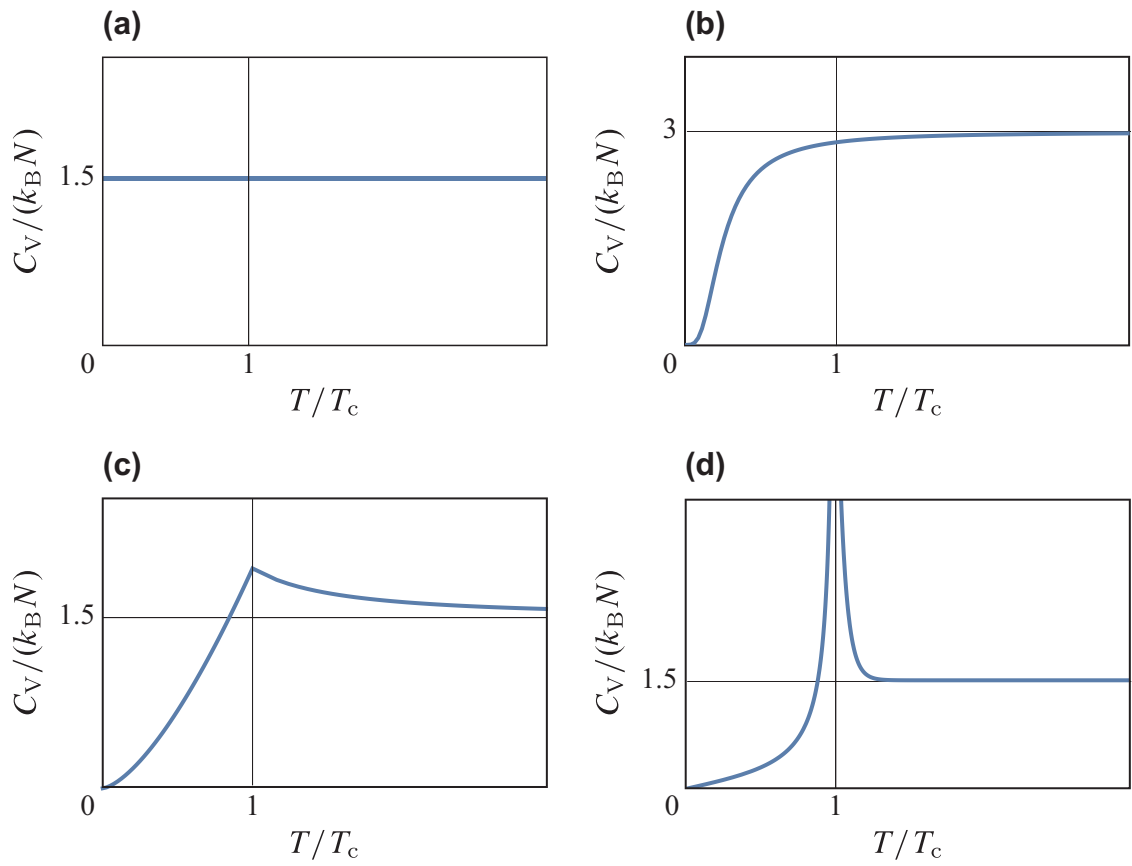
100年前の1924年, ボースから光子気体に関する論文を受け取ったアインシュタインは, 原子気体へと研究を展開し, 同年「ある温度からはずっと, 分子は引力もないのに“凝縮”する」と手紙に書いている。この現象の統計力学について以下の設問に答えなさい。ボルツマン定数を k_B , 温度 T に対する逆温度を $\beta = 1/(k_B T)$, プランク定数を h とする。

- (1) 温度 T , 化学ポテンシャル μ の同種粒子の大正準集団を考える。大分配関数は, 系全体のエネルギー固有状態 i のエネルギー E_i と粒子数 N_i を用いて $\Xi = \sum_i e^{-\beta E_i + \beta \mu N_i}$ である。粒子数の期待値が $\langle N \rangle = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \mu} \log \Xi$ と表されることを示しなさい。
- (2) ボース・アインシュタイン統計に従う同種粒子の理想気体（理想ボース気体）を考える。一粒子エネルギー固有状態 j ($j = 0, 1, 2, \dots$) のエネルギーを ε_j とするとき, 大分配関数は $\Xi_j = \sum_{n_j=0}^{\infty} e^{-\beta(\varepsilon_j - \mu)n_j}$ を用いて $\Xi = \prod_{j=0}^{\infty} \Xi_j$ と表される。固有状態 j を占有する粒子数の期待値 $\langle n_j \rangle = f(\varepsilon_j, T, \mu)$ を求めなさい。

次に, 理想ボース気体を体積 V の3次元の箱の中に閉じ込める。粒子の質量を m , 粒子数を N とし, スピンは0とする。体積 V が十分に大きいとすると, 一粒子エネルギー固有状態が連続的に存在すると考えることができ, $[\varepsilon, \varepsilon + \Delta\varepsilon]$ の微小なエネルギー範囲に存在する状態数は $D(\varepsilon)\Delta\varepsilon = V \cdot 2\pi(2m/h^2)^{3/2} \sqrt{\varepsilon} \Delta\varepsilon$ で与えられる。

- (3) 化学ポテンシャルについて $\mu \leq 0$ と考えてよい理由を説明しなさい。
- (4) 粒子数の条件 $N = \int_0^{\infty} f(\varepsilon, T, \mu) D(\varepsilon) d\varepsilon$ から化学ポテンシャルが決められる。温度の低下にともない化学ポテンシャルが増大することを説明しなさい。
- (5) 化学ポテンシャルが $\mu = 0$ のときの温度を求めなさい。 $\int_0^{\infty} \sqrt{x}/(e^x - 1) dx = (\sqrt{\pi}/2)\zeta(3/2)$ である。ゼータ関数 $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ に対して $\zeta(3/2) = 2.612\dots$ であるが, 結果に $\zeta(3/2)$ を残しても構わない。
- (6) 温度が設問(5)で求めた温度 T_c より低いとき設問(4)の等式は成立しなくなる。 $T < T_c$ における両辺の差を N_0 とするとき, N_0 を N, T, T_c を用いて表しなさい。
- (7) 温度が T_c より低いときに起こる物理現象について説明しなさい。

- (8) この理想ボース気体の定積熱容量 C_V のグラフとして正しいものを以下の (a)～(d) から選びなさい。また, 正しいと考える根拠を説明しなさい。



(終わり)