物理学AI

I 古典力学に関する以下の設問に答えなさい。

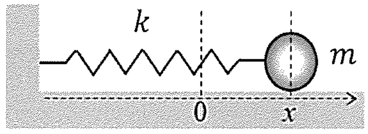

図1

バネ定数kのバネで壁とつながっている質量mのおもりの一次元の振動運動を考える。図1のように、時刻tにおけるおもりの位置座標を$x(t)$，速度を$\dot{x}(t)$とし、バネの自然長をx軸の原点とする。以下では、バネの質量や重力、床からの摩擦は無視できるものとし、位置の時間微分については$\dot{x} = dx/dt$、$\ddot{x} = d^2x/dt^2$のように略号を用いる。

（１）おもりがバネからの力のみを受ける場合の運動方程式を立てなさい。

（２）$t = 0$における初期条件が$x = x_0$、$\dot{x} = 0$の場合について設問（1）で立てた運動方程式を解き、さらに振動運動の周期を答えなさい。また、時刻tにおけるおもりの運動エネルギー、ポテンシャルエネルギー、全エネルギーを計算しなさい。

（３）図1のおもりが速度に比例する抵抗力$-\eta\dot{x}$をうける場合の振動運動に関する運動方程式を立てなさい。ただしηは正の定数とする。更に、この運動方程式が$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$の形に式変形できることを示し、$\omega_0$ とγをm、k、ηを用いて表しなさい。ここで、ω_0 は自由振動数、γは減衰率と呼ばれる物理量であり、いずれも正の値をとる。

次に、設問（3）の抵抗力がある系に対して更に時間に依存する外力$F(t,\omega) = F_0 exp(-i\omega t)$を$x$軸方向に加える場合の振動運動について考える。

（４）この振動運動の運動方程式を立てなさい。解の形を$x(t,\omega) = A(\omega)exp(-i\omega t)$と仮定し、その時の複素振幅$A(\omega)$を求めなさい。ただし、$\omega_0$ とγを用いること。

（５）外力の振動数ωが自由振動数ω_0の近傍にある$(\omega \approx \omega_0)$場合は、$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$ という近似式が成立する。この近似式を用いて、設問（4）で求めた複素振幅が$A(\omega) = \frac{F_0}{2m\omega_0}\frac{1}{\omega_0 - \omega - i\gamma}$と表されることを示しなさい。また、この複素振幅を$A(\omega) = |A(\omega)|exp\left(i\theta(\omega)\right)$の形に変形した場合の絶対値$|A(\omega)|$を求め、さらに位相$\theta(\omega)$について$\tan\theta(\omega) = \frac{\gamma}{\omega_0 - \omega}$の関係式が成立することを示しなさい。おもりの振動$x(t,\omega)$の位相が外力$F(t,\omega)$の位相に対して$\theta(\omega)$だけずれることも確かめなさい。

（６）抵抗力がある場合$(\eta > 0)$と抵抗力がない場合$(\eta = 0)$について、それぞれ$|A(\omega)|$と$\theta(\omega)$の概形を最も適切に表しているものを以下の図 2 の(a)から(h)の中から選択しなさい。

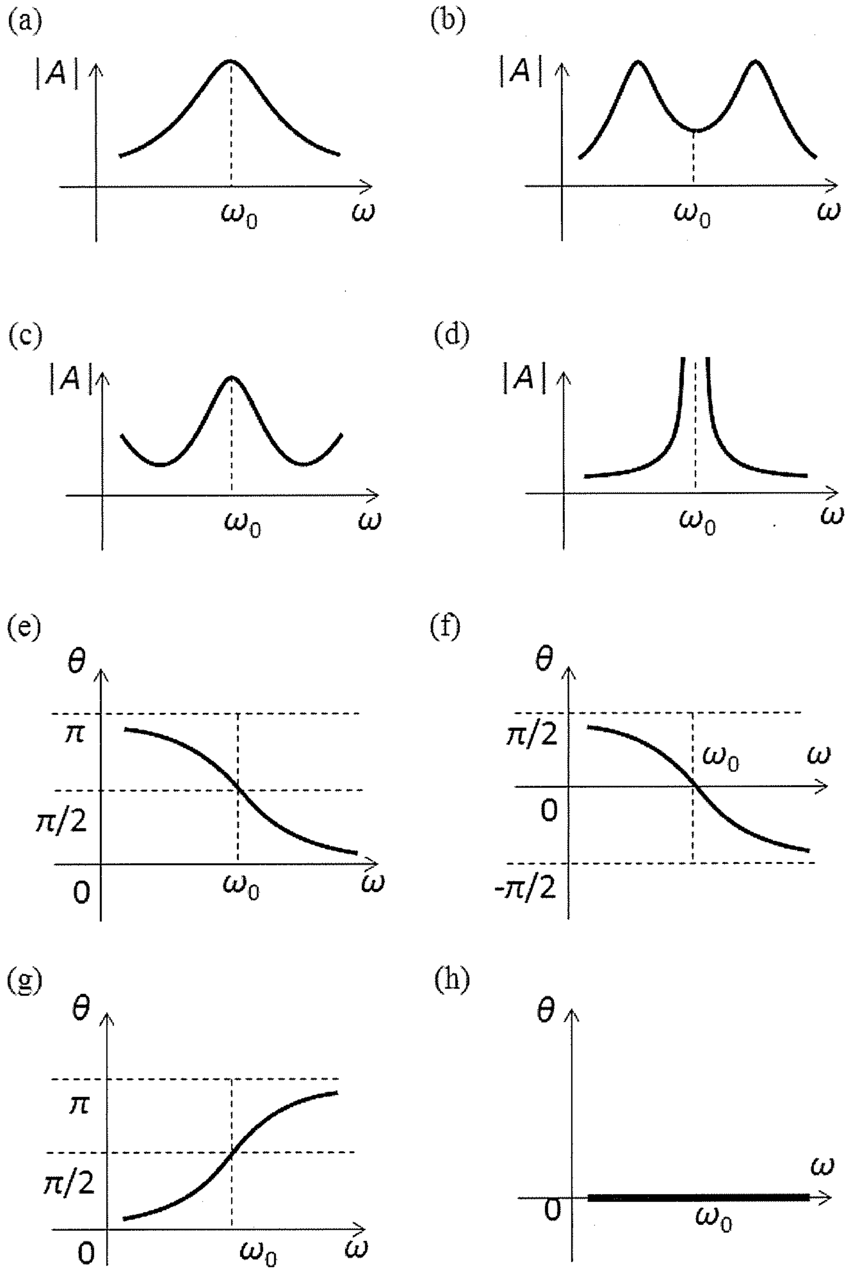
(a)
|A|
ω_0
ω
(b)
|A|
ω_0
ω
(c)
|A|
ω_0
ω
(d)
|A|
ω_0
ω
(e)
θ
π
$\pi/2$
0
ω_0
ω
(f)
θ
$\pi/2$
ω_0
ω
0
$-\pi/2$
(g)
θ
π
$\pi/2$
0
ω_0
ω
(h)
θ
ω
0
ω_0

図2

物　理　学　A　II

II 電磁気学に関する以下の設問に答えなさい。

以下、電荷q、質量mをもつ荷電粒子の電磁場中での運動に関する設問に答えなさい。単位系にはMKSA単位系を用いなさい。ここで、荷電粒子は真空中を運動しており、重力の影響は無視できるものとする。

（1）電磁場中で運動する荷電粒子に働く力$\boldsymbol{F}$は位置ベクトル$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$を用いて$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}+q\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\boldsymbol{B}$で与えられる。ここで、$\boldsymbol{E}$は電場、$\boldsymbol{B}$は磁束密度、$t$は時間である。電場及び磁束密度が一様で、$\boldsymbol{E}=(E_x,E_y,E_z)$、$\boldsymbol{B}=(B_x,B_y,B_z)$であるとき、荷電粒子の運動方程式を$x$、$y$、$z$の各要素について導出しなさい。

（2）$E_x=E_y=E_z=0$、及び$B_x=B_y=0$、$B_z=B_0$のとき、設問（1）で求めた運動方程式をx、y、zの各要素について解きなさい。ただし、時刻$t=0$における荷電粒子の位置及び速度は$\boldsymbol{r}=(0,0,0)$及び$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}=(v_0,0,0)$、$v_0>0$であったものとする。時間の関数$f(t)$に関する微分方程式$\dfrac{d^2f}{dt^2}=-\omega^2 f$の一般解が$f(t)=C_1\sin\omega t+C_2\cos\omega t$であることを用いてもよい。ここで、$C_1$及び$C_2$は定数であり、$\omega$は実数である。

（3）設問（2）の結果から荷電粒子の運動の軌跡が閉じた円であることを示し、その半径及び中心の座標を求めなさい。

（4）時刻$t=0$に荷電粒子が位置$\boldsymbol{r}=(0,0,0)$から速度$\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}=(v_0,0,0)$で打ち出されたとする。ここで、$v_0>0$であったものとする。$t=t_0$までは電場$E_y=E_0$、$E_x=E_z=0$及び磁場$B_x=B_y=B_z=0$を印加し、$t=t_0$以降は電磁場を印加しなかった（$E_x=E_y=E_z=0$、及び$B_x=B_y=B_z=0$）。この時、荷電粒子が$x=x_0$の$yz$平面に達したときの$y$、$z$の座標を求めなさい。ただし$x_0$は正の実数とする。