物 理 学 BI

量子力学に関する以下の問題に答えなさい。

図１に示す１次元のポテンシャル $V(x)$ に、エネルギー E を持った質量 m の粒子が、$x<0$ の領域から $x>0$ の方向に入射する場合を考える。$V(x)$ は以下の式で表される。

$$V(x)=\begin{cases} 0 & (x<0) \\ V_0 & (0\le x\le a) \\ 0 & (a<x) \end{cases}$$

なお、プランク定数を h として $\hbar=\frac{h}{2\pi}$ とする。

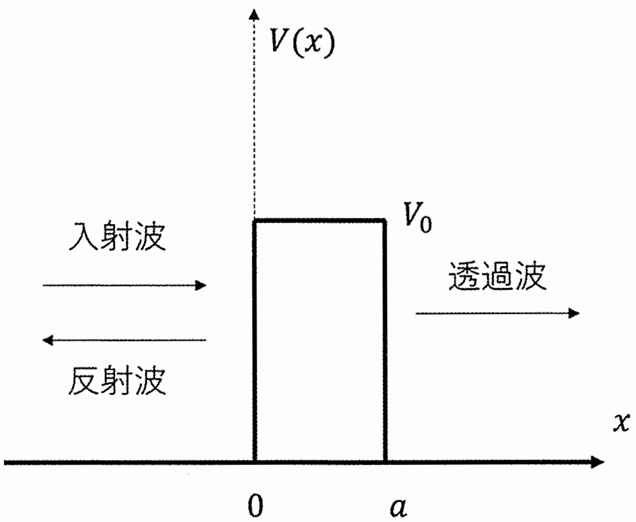

図１　１次元ポテンシャル

(1) 波動関数を$\phi(x)$として、この粒子の、$x<0$（領域 I）、$0\le x\le a$（領域 II）、$a<x$（領域 III）のそれぞれの領域における、時間に依存しないシュレディンガー方程式を書きなさい。

(2) $V_0>E>0$ の場合、(1)のシュレディンガー方程式の解となる、領域 I での波動関数$\phi_{\mathrm{I}}(x)$、領域 II での波動関数$\phi_{\mathrm{II}}(x)$、領域 III での波動関数$\phi_{\mathrm{III}}(x)$は

$$\phi_{\mathrm{I}}(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}$$

$$\phi_{\mathrm{II}}(x) = Ce^{k_2x} + De^{-k_2x}$$

$$\phi_{\mathrm{III}}(x) = Fe^{ik_1x}$$

で表される。正の実数 k_1と k_2 を、m、E、V_0、$\hbar$ のうち、必要なものを用いて表しなさい。

(3) (2)のA、B、C、D を、$x = 0$ と$x = a$ において波動関数がなめらかにつながる条件を用い、F、k_1、k_2、a を用いて表しなさい。

(4) 図１のポテンシャルに入射する粒子が古典的である場合と量子力学的である場合の違いを述べなさい。

物 理 学 BII

統計力学に関する以下の設問に答えなさい。

外力が働かない状況における静止した系を考える。定積熱容量とこの系の全エネルギーの揺らぎの関係を求めたい。温度Tのカノニカルアンサンブルにおける分配関数Zは

$$Z=\int dE\ \mathrm{e}^{-\beta E}\ \Omega(E)$$

と書き表せる。ここでEはこの系の全エネルギー、$\Omega(E)$は状態密度、$\beta=\dfrac{1}{kT}$、kはボルツマン定数である。また、物理量$A(E)$のアンサンブル平均は

$$\langle A\rangle=\frac{\int dE\ A(E)\ \mathrm{e}^{-\beta E}\ \Omega(E)}{\int dE\ \mathrm{e}^{-\beta E}\ \Omega(E)}$$

と書ける。

（1）分配関数Zを用いて全エネルギーのアンサンブル平均$\langle E\rangle$が

$$\langle E\rangle=-\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z$$

と表されることを示しなさい。ただし、logは自然対数である。

（2）以下の関係式

$$\langle E^2\rangle=\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial\beta^2}$$

を導きなさい。

（3）$\dfrac{\partial\langle E\rangle}{\partial\beta}$と全エネルギーの揺らぎ$\left\langle\left(E-\langle E\rangle\right)^2\right\rangle$の関係を求めなさい。

（4）$\dfrac{\partial\langle E\rangle}{\partial\beta}$と定積熱容量$C_V$の関係を求めなさい。ただし、$C_V=\dfrac{\partial\langle E\rangle}{\partial T}$である。

（5）C_Vと$\left\langle\left(E-\langle E\rangle\right)^2\right\rangle$の関係を求めなさい。