物 理 学 B I

【全2ページ】

量子力学に関する以下の設問に答えなさい。虚数単位を i とし，プランク定数 h を 2π で割ったものを $\hbar$ とする。ハミルトニアン $\hat{H}$ に対して状態ベクトル $|\psi(t)\rangle$ は，$i\hbar\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$ に従って時間発展する。

スピン 1/2 の粒子が，z 軸の正方向にかけられた強さ B_0 の一様定常磁場の中にある。このとき，スピンに由来する磁気モーメントと磁場との相互作用によるハミルトニアンは，B_0 に比例する量 $\omega_0 > 0$ を用いて

$$\hat{H} = -\omega_0 \hat{S}_z$$

と表すことができる。z 軸方向の上向きスピン，下向きスピンの状態を $|\uparrow\rangle = \binom{1}{0}$, $|\downarrow\rangle = \binom{0}{1}$ と書くとき，スピン角運動量演算子 $\hat{S}_i$ $(i = x, y, z)$ はパウリ行列

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

を用いて $\hat{S}_i = \dfrac{\hbar}{2}\sigma_i$ と表される。

(1) ハミルトニアン $\hat{H}$ のエネルギー固有値を求めなさい。

(2) x 軸方向のスピン角運動量演算子 $\hat{S}_x$ の固有値 $+\hbar/2$ に属する固有状態 $|S_x;+\rangle$ を，$|\uparrow\rangle$ と $|\downarrow\rangle$ を用いて表しなさい。規格化した状態を結論とすること。

スピンと磁場の向きが平行でないとき，スピンは歳差運動を起こす。時刻 $t = 0$ においてスピン角運量が $S_x = +\hbar/2$ であるとする。

(3) 時刻 $t \geqq 0$ のスピンの状態ベクトル $|\psi(t)\rangle$ を $|\uparrow\rangle$ と $|\downarrow\rangle$ を用いて表しなさい。

(4) $\langle S_x;+|\psi(t)\rangle$ を考えることにより，時刻 $t \geqq 0$ のスピン角運動量が $S_x = +\hbar/2$ の状態に見出される確率を求めなさい。

(5) x 軸方向のスピン角運動量の期待値 $\langle \hat{S}_x \rangle$ を時刻 t の関数として求めなさい。

B_0 に比べて十分に弱い振動磁場 $B_1 \cos\omega t$ を x 軸方向に印加すると，ハミルトニアンは

$$\hat{H} = -\omega_0 \hat{S}_z - 4\lambda \cos(\omega t)\hat{S}_x, \quad |\lambda| \ll \omega_0$$

の形に表すことができる。

(6)　時刻 $t \geqq 0$ のスピンの状態ベクトルを $|\psi(t)\rangle = C_\uparrow(t)e^{+i\omega_0 t/2}|\uparrow\rangle + C_\downarrow(t)e^{-i\omega_0 t/2}|\downarrow\rangle$ と書くとき, $C_\uparrow(t)$ と $C_\downarrow(t)$ が満たす微分方程式を求めなさい。計算の簡単のため, 高振動数成分 $e^{\pm i(\omega+\omega_0)t}$ を含む項を無視しても良い。

(7)　設問 (6) の係数を $C_{\uparrow\downarrow}(t) = C^{(0)}_{\uparrow\downarrow}(t) + \lambda C^{(1)}_{\uparrow\downarrow}(t) + \cdots$ と λ で展開する。微分方程式の両辺に現れる λ の冪を比較することにより, $C^{(0)}_\uparrow(t)$ と $C^{(1)}_\uparrow(t)$ が満たす微分方程式を求めなさい。

(8)　時刻 $t = 0$ のスピン角運動量が $S_z = -\hbar/2$ であるとする。一次の摂動近似により, 時刻 $t \geqq 0$ のスピン角運動量が $S_z = +\hbar/2$ の状態に見出される確率を求めなさい。

（終わり）

物　理　学　B　II

【全１ページ】

統計力学に関する以下の設問に答えなさい。ボルツマン定数を k_{B}, 温度 T に対する逆温度を $\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$, プランク定数 h を 2π で割ったものを $\hbar$ とする。

固体の比熱が絶対零度で 0 になることを説明するためにアインシュタインが提案した模型を考える。この模型では, N 個の原子からなる結晶の格子振動を, 角振動数 ω の $3N$ 個の独立な 1 次元調和振動子の集まりと考える。

この系が温度 T の熱平衡状態にあるとする。調和振動子のエネルギー固有値は非負整数 n を用いて $\varepsilon_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ となるので, 全系の分配関数 Z は $z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\varepsilon_n}$ を用いて $Z = z^{3N}$ と表すことができる。

(1)　熱平衡にある系のエネルギー期待値が $\langle E \rangle = -\dfrac{\partial}{\partial\beta}\log Z$ と表されることを示しなさい。

(2)　系のエネルギー期待値 $\langle E \rangle$ を求めなさい。

(3)　定積熱容量 C_{V} を求めなさい。

(4)　高温極限 $k_{\mathrm{B}}T \gg \hbar\omega$ において, 設問 (3) の結果が古典力学を用いて得られる熱容量となることを示しなさい。また, その物理的意味を説明しなさい。

(5)　低温極限 $k_{\mathrm{B}}T \ll \hbar\omega$ において, 設問 (3) の結果が温度の減少とともに 0 に近づくことを示しなさい。また, 古典力学を用いて得られる結果との違いが生じる物理的理由を説明しなさい。

(6)　このアインシュタイン模型では, 低温極限における比熱が温度 T の 3 乗に比例するという実験事実を説明することができない。模型をどのように改良すれば良いかを提案しなさい。

（終わり）